

INTERACCION DINAMICA FLUIDO-ESTRUCTURA MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Medina Encina, F. y Dominguez Abascal. J.

C6tedra de Estructuras.

E. T. S. Ingenieros Industriales de Sevilla.

Avda. Reina Mercedes, s/n, 41012 SEVILLA.

Resumen.- En esta comunicaci3n se presenta una t6cnica de an6lisis basada en la aplicaci3n del M.E.C. en elastodin6mica en el dominio de la frecuencia, y en mec6nica de fluidos con peque as perturbaciones. Partiendo de la formulaci3n correspondiente a un modelo bidimensional. se establece un procedimiento de obtenci3n de la respuesta din6mica para un sistema acoplado s3lido-liquido, en general y se analiza la respuesta din6mica de un embalse con presa de gravedad, poniendose de manifiesto la importancia de la interacci3n fluido-estructura en el comportamiento del sistema.

El estudio realizado muestra la bondad del M.E.C. para el an6lisis din6mico de sistemas s3lido-liquido, Particularmente en casos como el indicado en que existen regiones no acotadas y una extensa superficie libre en el liquido.

Abstract.- In this paper a technique based on the frequency domain formulation of the B.E.M. for elastic and fluid domains is presented. Using a two-dimensional model, a procedure for computing the dynamic response of a coupled solid-fluid system is established. The response of a reservoir with a gravity dam is analysed and the importance of the fluid-structure interaction in the behaviour of the system shown.

The analysis carried out shows the capability of the B.E.M. for the study of the dynamic behaviour of the solid-fluid systems, particularly for those that include boundless regions and a large liquid free surface.

1. INTRODUCCION.

El estudio del comportamiento din6mico de grandes dep3sitos de liquidos requiere la consideraci3n de la interacci3n entre el fluido y la estructura que lo contiene, pues el sistema en su conjunto presenta un comportamiento bien diferente del de cada una de sus elementos considerados aisladamente.

A lo largo de los 6ltimos a os se han elaborado diversos modelos y m6todos de an6lisis para el comportamiento din6mico de un embalse. principalmente basados en la aplicaci3n del M.E.F., dando lugar a diversas aproximaciones, debido a la dificultad de discretizaci3n del medio fluido infinito. Asf, el agua se trata como un medio continuo (CHAKRABARTI y CHOPRA,

1974). o se discretiza con elementos finitos especiales (SAINI y otros. 1978). Modelos m6s recientes expresan la respuesta como superposici3n de modos de vibraci3n de la presa a embalse vacfo (HALL y CHOPRA, 1982) o usan hiperelementos para modelar el embalse (LOTFI y otros, 1987).

El modelo que se propone considera la estructura como un s3lido viscoel6stico lineal, cuya respuesta se obtiene usando el M.E.C. en elastodin6mica, en el dominio de la frecuencia (DOMINGUEZ, 1978). Se tiene en cuenta la compresibilidad del agua y se admite la hip3tesis de presi3n nula en la superficie libre imperturbada, pues el error que se comete es despreciable con ondas en el agua de peque a amplitud.

2. MODELO PARA EL ANALISIS DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DEL AGUA.

El agua se considera un fluido compresible, no viscoso, sometido a pequeñas perturbaciones. Linealizando las variables en las ecuaciones de Navier-Stokes, con movimiento irrotacional, y despreciando el término de viscosidad se obtiene la ecuación de equilibrio hidrodinámico

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p$$

siendo p la presión hidrodinámica y v la velocidad y ρ la densidad respectivamente. Derivando la ecuación de continuidad, tomando divergencia de la ecuación de equilibrio y restando ambas se obtiene la ecuación de ondas que rige el movimiento:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt^2}$$

donde c representa la velocidad de propagación.

Si existe una excitación armónica, de frecuencia ω , la presión puede expresarse:

$$p(x,t) = p(x) e^{i\omega t}$$

donde $p(x)$ es la función de respuesta, compleja, para la presión hidrodinámica. La ecuación de ondas se convierte en la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

que se utiliza para estudiar el comportamiento dinámico del agua compresible.

Con las hipótesis mencionadas, la relación entre presión y velocidad se expresa:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -i\rho\omega v_x$$

y el movimiento en una dirección $-x$ es:

$$u = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial x}$$

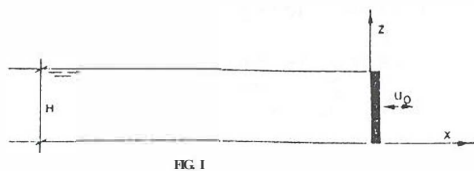
2.1. VIBRACIONES DE UNA LAMINA LIQUIDA.

Sea una lámina de agua semiinfinita, sometida a un estado de presiones hidrodinámicas generadas por una aceleración horizontal del paramento vertical, constante a lo largo de x . La solución general de la ecuación de ondas es:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{i\lambda_n z} + A'_n e^{-i\lambda_n z}) e^{k_n x}$$

donde

$$k_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$



La condición de presión nula en la superficie libre y velocidad nula en el fondo, normal a ese contorno se expresan:

$$p = 0 \text{ en } z = H$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0$$

que aplicadas a la solución general dan la expresión de la ley de presiones hidrodinámicas en la lámina de agua con fondo rígido.

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n z} e^{k_n x}$$

Imponiendo la condición de contorno de aceleración constante en el paramento vertical, expresada como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 u_0 \text{ en } x = 0$$

las presiones resultan:

$$p = -\frac{4\rho\omega^2 u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} e^{\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x} \cos \lambda_n z$$

correspondientes al movimiento de amplitud u_0 , uniforme en $-x$, de la sección $x=0$.

Si en la sección transversal de referencia $x=0$ existen unas aceleraciones horizontales

$$i^1(\epsilon) = -\omega^2 u_0$$

se puede escribir, en general

$$f(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{k_n} e^{i\lambda_n z} e^{k_n x} \cos \lambda_n z$$

para los movimientos en $x=0$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{k_n} e^{i\lambda_n z} e^{k_n x} \cos \lambda_n z$$

siendo

$$A_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)\pi} \frac{J_n}{W_n}$$

Si se desea una representación de las presiones a una cierta distancia, bastará tomar un número finito, N , de términos del desarrollo, que sea suficiente para obtener una buena aproximación, para una determinada frecuencia.

De esta forma se pueden establecer relaciones matriciales entre las presiones y movimientos en N puntos con los N coeficientes del desarrollo. Así si se particularizan las funciones de presión y movimiento para N valores de x se tiene

$$f^1_i = A_{ij} u_j$$

$$u_j = \delta_{jn} u_n$$

Pueden eliminarse las u_n y escribir en forma matricial las relaciones

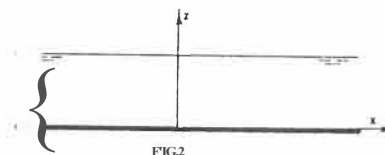
discretas entre las presiones y los movimientos de la sección:

$$H p = G u$$

y estas relaciones p, u podrán ser añadidas fácilmente a las ecuaciones del sistema fluido-estructura finito, como condiciones de contorno en la interfase con el mismo.

2.2. PROPAGACION DE ONDAS GENERADAS POR UN MOVIMIENTO DE LA BASE.

En una lámina de agua sobre una base rígida sometida a una excitación vertical, el gradiente de presión en dirección normal a la base es constante a lo largo de ella.



La solución de presiones puede escribirse como:

$$p(z) = A e^{\frac{i\omega}{c}(z-H)} + A' e^{-\frac{i\omega}{c}(z-H)}$$

Imponiendo la condición de presión nula en la superficie libre se puede escribir en la forma

$$p(z) = \bar{A} e^{\frac{i\omega}{c}z} e^{-\frac{i\omega}{c}H}$$

que representa el campo de presiones correspondiente a la propagación monodimensional, siendo válida bajo la consideración de lámina infinita con excitación constante en x . En este caso las presiones no varían con x y es $i\omega u_0$.

Si la excitación de la base viene dada por un movimiento armónico de amplitud $u_0(x) = u_0 e^{i\omega t}$, normal al contorno de fondo, se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\omega^2 u_0$$

y el campo de presiones es:

$$p(z) = \rho\omega^2 u_0 \frac{e^{\frac{i\omega}{c}(z-H)} - e^{-\frac{i\omega}{c}(z-H)}}{2}$$

resultando inmediato comprobar que la frecuencia natural de la lámina de agua corresponde a

$$\omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{c}{H} ; \omega_1 = \frac{\pi c}{2H}$$

Cuando la pared vertical de un depósito semiinfinito sea absolutamente rígida, la distribución de presiones sobre ésta, producidas por una excitación vertical del fondo, viene dada por la expresión anterior. Sin embargo este campo de presiones sería el resultante si no se considera interacción fluido-estructura. Solo si se admite que la pared es indeformable se puede considerar que las presiones obtenidas anteriormente son las que actuarían sobre el trasdós. En general, al actuar estas presiones sobre la estructura que contiene al fluido, ésta se deforma y no puede considerarse la condición utilizada anteriormente, en $x=0$, correspondiente a velocidad nula en el trasdós. Al deformarse la estructura como consecuencia de las presiones debidas al movimiento horizontal del fondo y de la propia estructura aparecen ondas de velocidad horizontal que generan nuevas presiones sobre aquella.

Es necesario pues considerar el efecto de la interacción fluido-estructura para el estudio de la propagación de las ondas que se generan por el movimiento de la base. En un contorno vertical la presión total será

$$p_T = p^1 + p^2$$

donde p^1 es la presión obtenida con (1), p^2 es la presión generada por el movimiento $u_0(x)$ (con $u_0(x)$ en $x=0$).

Considerado ese contorno como interfase con el sistema cerrado fluido-estructura, la relación anterior entre la presión total y el movimiento horizontal constituye la condición de

contorno a aplicar en dicha interfase. y haciendo uso de relaciones discretas en puntos a diferentes alturas de la sección, puede escribirse en forma matricial:

$$H p_T = G u + H p_I$$

3. EL M.E.C. EN PROBLEMAS DE DINAMICA DE FLUIDOS CON PEQUEÑAS PERTURBACIONES.

La ecuación que gobierna el movimiento del fluido, con pequeñas perturbaciones, para una excitación armónica, es

$$\nabla^2 p + \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (J.1)$$

Mediante el teorema de Green se tiene

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi - p \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - p \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.2)$$

y sea solución de la ecuación (3.1) en el dominio Ω con condiciones de contorno en Γ y ϕ , una solución fundamental, esto es:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \phi + \delta^P = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (U)$$

Sustituyendo en las integrales de (3.2) queda:

$$p^P + \int_{\Gamma} p \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \phi d\Gamma \quad (3.4)$$

Esta ecuación es la misma que la del problema de Laplace, cuya solución fundamental es

$$\phi_j = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{r}{c} \right) \quad (G.J.)$$

donde $H_0^{(1)}$ es una función de Hankel. También puede escribirse en la forma

$$\phi = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(-i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (3.)$$

que es la solución fundamental expresada por medio de una función de Bessel modificada de orden cero, de segunda especie. El flujo se obtiene derivando respecto a la normal al contorno, resultando

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{CW}{2\pi i c} \left(K_1' \left(\frac{\omega r}{c} \right) - C \frac{c \omega}{c} \frac{dr}{dl} \right) \quad U.+J$$

siendo K_1 una función de Bessel modificada, de segunda especie, primer orden. Así. la representación de la presión en un punto P del dominio Ω en función de las presiones en el

contorno Γ y sus gradientes normales al mismo, se expresan mediante (3.4). donde G_{ij} vienen dadas por (3.6) y (3.7).

Cuando el punto P pertenece al contorno, se aísla la singularidad en la forma habitual del M.E.C. pudiéndose escribir

$$C p + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \phi d\Gamma \quad (3.7)$$

siendo $c = 1 + i$, que expresa la presión en un punto del contorno en función de la presión y su derivada en los demás puntos del mismo, y donde las integrales excluyen el punto P.

Si el contorno es suave resulta ser:

$$I = -\frac{1}{2} \quad (3.8)$$

y si el punto P está en una esquina resulta

$$J = -\frac{1+\beta}{2\pi} \quad (3.9)$$

donde β es el ángulo que forman las normales a ambos lados del punto anguloso.

Las integrales se realizan numéricamente. discretizando el contorno en elementos y aproximando la presión y su derivada en el contorno en función de los valores en los nodos. Así se tiene

$$C_p p + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \frac{\partial p_j}{\partial n} \phi_j d\Gamma \quad (J.11)$$

donde ϕ_j son valores nodales y N son las funciones de interpolación. Las integrales presentan una singularidad cuando coincide con un nodo del elemento sobre el que se integra y en este caso se estudia explícitamente la singularidad. Se han utilizado elementos parabólicos y estableciendo la ecuación integral para cada nodo del contorno se obtiene el sistema de ecuaciones

$$C p + \hat{H} p = G \frac{\partial p}{\partial n} \quad (12)$$

y llamando $C = C + \hat{H}$ se tiene:

$$H p = G \frac{\partial p}{\partial n} \quad (3.13)$$

Sobre el contorno será conocida la presión o el movimiento según la normal del mismo, q ; teniendo en cuenta que $\phi_j = e^{i\omega t}$, el sistema de ecuaciones se escribe, sustituyendo q por $e^{i\omega t}$ como:

$$i\omega p = G \frac{\partial p}{\partial n} \quad (0.4)$$

el cual, una vez impuestas las condiciones de contorno, $p = p_0$ ó $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$; dará lugar a un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, siendo N el número de nodos.

En el caso de que la condición de contorno sea de presión nula en un contorno recto. como ocurre en la superficie libre de un líquido, resulta ventajoso utilizar el método de las imágenes, que permite no tener que discretizar dicho contorno.

4. ACOPLAMIENTO DE SUBREGIONES SOLIDAS Y LIQUIDAS.

Cuando existen subregiones sólidas y líquidas en contacto se tiene una interfase entre ellas que requiere un tratamiento peculiar, ya que es necesario resolver el problema conjunto, el cual presenta la peculiaridad de tener cuatro incógnitas por nodo (u, v, w, t) en el contorno sólido, y dos (p, w) en el contorno líquido.

La condición de compatibilidad de movimientos en la interfase sólido-líquido se establece igualando las velocidades normales a la interfase, en ambos componentes. Así puede expresarse:

$$w = u_x \eta_x + u_z \eta_z$$

que indica que el movimiento normal al contorno interfase. para el líquido es igual que para el sólido, siendo η_x, η_z las componentes de la normal al contorno del líquido.

En la interfase, la tensión tangencial sobre el sólido es nula y su tensión normal es igual a la presión cambiada de signo. Por tanto. el equilibrio de tensiones se expresa

$$0 = -t_x \eta_x + p \eta_z$$

$$p = t_x \eta_x + t_z \eta_z$$

Sean $u = u_0 e^{i\omega t}$ las ecuaciones para el sólido y $p = p_0 e^{i\omega t}$ las del líquido, en un sistema-fluido-estructura como el representado en la fig. 3. En un nodo de la interfase se pueden expresar tres incógnitas en función de las otras tres:

$$t_x = f_1 x$$

$$t_z = p \eta_z$$

$$u = \eta_x + \eta_z$$

quedando u, t_x y p como incógnitas,

en la interfase. Para cada nodo existen tres ecuaciones, una para la subregión líquida y dos para la subregión sólida, por lo que se tienen finalmente. tantas ecuaciones como incógnitas.

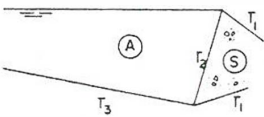


Fig. 3

Particionando el sistema de ecuaciones de ambas subregiones se tiene

$$f_1 x + f_2 z = p \eta_z$$

$$f_1 x + f_2 z = p \eta_z$$

Desarrollando $f_1 x, f_2 z$ correspondientes a la interfase, se tiene

$$f_1 x + f_2 z = p \eta_z$$

$$f_1 x + f_2 z = p \eta_z$$

Si se imponen a continuación las condiciones de contorno en los bordes exteriores de ambas subregiones queda un sistema cuya solución incluye $f_1 x, f_2 z$ con lo que pueden obtenerse las otras tres incógnitas por nodo de la interfase, u, t_x y p .

5. INTERACCION FLUIDO-ESTRUCTURA EN UN EMBALSE CON PRESA DE GRAVEDAD.

El procedimiento descrito en los apartados anteriores se aplica al estudio del comportamiento dinámico de un sistema constituido por un fluido que es el agua embalsada y una estructura de contención que es la presa.

El modelo se representa en la fig. 4 donde se indican las subregiones sólidas y líquidas y los contornos que se discretizan. Si se considera el agua compresible, la variación con x de la presión en el fondo del embalse varía con x que es complejo y la onda de presión no se amortigua a distancias relativamente grandes de la presa. Así, resulta necesario modelar independientemente la cola del embalse como otra subregión, 8, para la cual es posible establecer unas relaciones presión-movimiento en el contorno vertical, R , interfase con la zona del embalse adyacente a la presa.

Cuando la base está sometida a una excitación horizontal, tras imponer las condiciones de contorno. las ecuaciones del sistema acoplado

son:

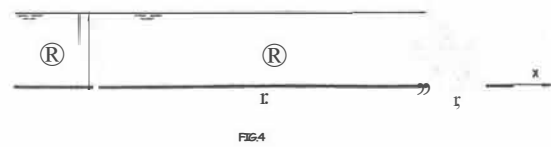


FIG.4

$$\begin{aligned} S) \quad & -G_1^S t_1^S + H_2^S u_2^S + H_3^S u_3^S - G_3^S p_3 = B^S \\ A) \quad & H_3^A p_3 + H_4^A p_4 - G_3^A u_3^S + H_5^S p_5 - G_5^S u_5 = B^A \\ B) \quad & H_5^B p_5 - G_5^B u_5 = B^B \end{aligned} \quad (5.1)$$

siendo:

$$-ij, \text{Suuu} \quad ; \quad 'g \quad ; \quad ^a=0 \quad ; \quad (5.2)$$

y las matrices fA y GJ se obtienen a partir de Sj y $s;.$ respectivamente en la forma indicada en el apartado anterior.

Si se considera una excitación vertical de la base, se generan presiones en contornos verticales del agua por lo que en la subregión 8 se tiene un campo de presiones originado por el movimiento de la base, más otro producido por los movimientos horizontales de f . Si $f;s,5:fs$ son las presiones y movimientos en/ considerado perteneciente a B y jJ , los producidos por la excitación vertical de la base de B. se tiene

$$IIs8Ces -ef) \quad "Jf \quad CcIs -<IJ \quad (5.3)$$

y siendo $Ys:0$, las ecuaciones del sistema acoplado resultan ser (5.1) siendo el término independiente:

$$\dot{e} = -h'/C \quad SfJ$$

$$A:- \quad (-)$$

$$B^B \quad " \quad i.ig \quad P \quad I$$

reresultante al imponer las condiciones de contorno.

Así pues, la interacción presa-embalse puede ser analizada sin más restricciones al modelo que las que derivan de la discretización y el método numérico empleado. El uso de la subregión tipo 8 y del contorno especial R permite obtener una notable convergencia de los resultados, incluso situando dicho contorno relativamente próximo a la presa. Sería factible estudiar el conjunto prescindiendo de la subregión A, con lo que no sería necesario discretizar el fondo del embalse; sin embargo puesto que la discretización del contorno R está asociada al número de términos que se tomen para expresar el desarrollo de las presiones y

movimientos, se estaría haciendo esta aproximación justo en el trasdós de la presa. Conviene, por tanto, separar dicho contorno de la presa alejándolo hasta donde la influencia del movimiento de ésta es bien representado con el número de términos que se adopte.

Para evaluar la importancia de los efectos de la interacción fluido-estructura en la respuesta sísmica de la presa se toma como variable de referencia la amplitud del movimiento relativo de la coronación de la presa, respecto al movimiento de la base. Se ha considerado la geometría simplificada, de la fig. 5, ya empleada por otros autores, donde se indica la discretización del modelo. La presa se considera de un material viscoelástico lineal, con las propiedades del hormigón y un 5 % de amortiguamiento histerético.

Las propiedades del agua se definen por su densidad y su velocidad de propagación.

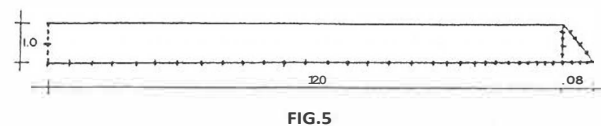


FIG.5

La amplificación de los desplazamientos de la coronación de la presa se representa en función de la frecuencia normalizada a la primera frecuencia de resonancia de la presa, a embalse vacfo.

En la fig. 6 se representa la respuesta del sistema presa-embalse para excitación horizontal, con embalse lleno y vacfo (línea de trazos). Se aprecia el descenso de las frecuencias de resonancia del sistema y un primer pico de respuesta muy agudo eng,=0. que se corresponde con la primera frecuencia natural del embalse. Así mismo, el segundo y tercer pico de la amplificación se producen en frecuencias menores que los correspondientes de la presa considerada aisladamente. La respuesta del sistema aumenta respecto a la de la presa con embalse vacfo, al considerar la interacción con el embalse. en primera frecuencia y disminuye en las siguientes.

La respuesta del sistema para excitación vertical se muestra en la fig. 7 y en ella se observa una disminución de las frecuencias a las que se presentan los picos de resonancia y un aumento significativo de la respuesta de la presa, que alcanza valores muy altos. aunque finitos.

La comparación de los resultados que se presentan con los obtenidos con otros modelos (LOTFI y otros, 1987; FENVES y CHOPRA, 1985) es muy satisfactoria, y en particular en el entorno de la primera frecuencia de resonancia (MEDINA, 1987).

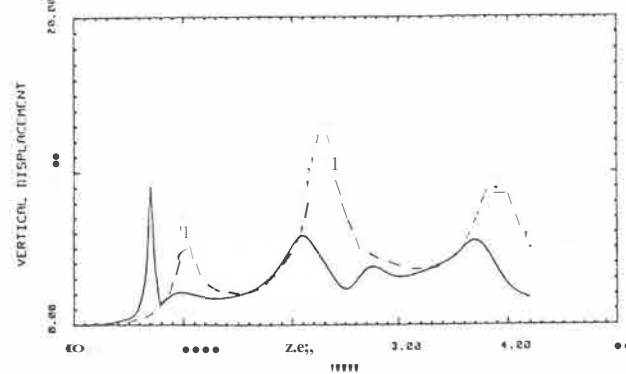
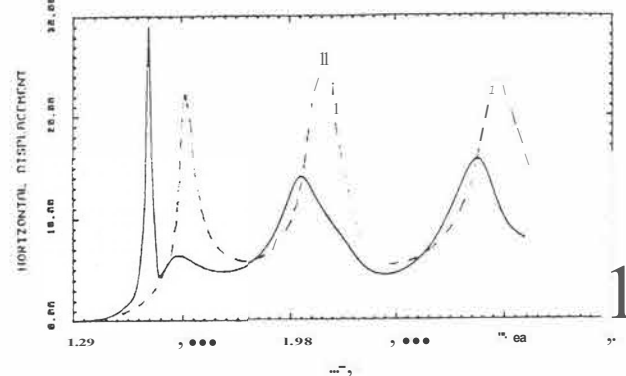


FIG.6

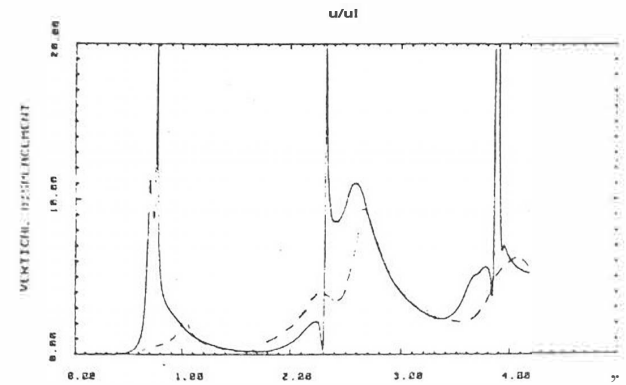
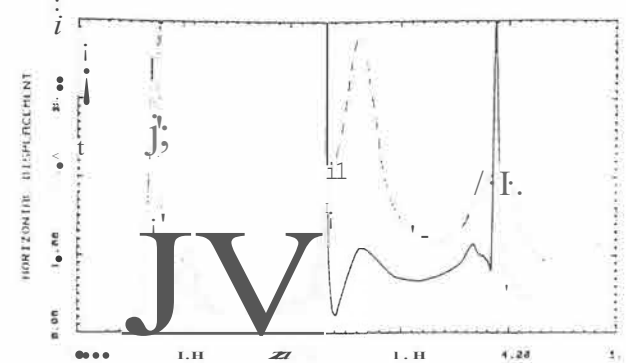


FIG.7

6. CONCLUSIONES.

Se ha puesto de manifiesto las posibilidades del M.E.C. en la resolución de problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia, con fases sólidas y líquidas que pueden ser acopladas mediante condiciones de contorno adecuadas en las interfaces. El uso del M.E.C. en elastodinámica y mecánica de fluidos con pequeñas perturbaciones permite, partiendo de la formulación bidimensional, establecer un procedimiento de obtención de la respuesta del sistema acoplado sólido-líquido en general.

En particular, cuando la subregión líquida posee superficie libre y el medio fluido se extiende indefinidamente, la aplicación del M.E.C. resulta especialmente ventajosa al ser únicamente necesaria la discretización del fondo. Esta técnica de análisis se ha usado para el estudio de la interacción dinámica en un embalse con presa de gravedad; el uso de elementos parabólicos y de un contorno especial de cierre del agua permit obtener resultados satisfactorios, que muestran la importancia del fenómeno de interacción fluido-estructura en la respuesta del sistema.

7. REFERENCIAS.

- Chakrabarty, P. y Chopra, A.K. (1973). "Hidrodinamic Effects in Earthquake Response of Gravity Dams", Journal of Structural Divison. ASCE. Vol.100 No. ST6, pp. 1211-1224.
- Domínguez, J. (1978), "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", Research Report R78-20 E.M.T.
- Fenves, G. y Chopra, A.K. (1985) "Effects of Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams". Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 13, pp. 13-31.
- Hall, J.F. y Chopra, A.K. (1982). "Hidrodinamic Effects in the Response of Concrete Gravity Dams", Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 10, No. 2, pp. 333-345.
- Lotfi, V.; Roesset, J. y Tassoulas, J. (1987). "A Technique for the Analysis of the Response of Dams to Earthquake". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, pp. 463-490.
- Medina, F. (1987), "Análisis de la Respuesta Sísmica de Presas incluyendo efectos de Interacción Suelo-Agua-Estructura". Tesis Doctoral. U.P. de Valencia.